Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 1

Лист работы 1 из 2

Задача № 2.

Рассмотрим число $(3-\sqrt{7})^{100}$.

$(3+\sqrt{7})^{100} + (3-\sqrt{7})^{100}$ – целое число, т.к.:

$(3+\sqrt{7})^{100} = 3^{100} + C_{100}^{1} \cdot \sqrt{7} \cdot 3^{99} + C_{100}^{2} \cdot (\sqrt{7})^2 \cdot 3^{98} + \ldots + C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{7})^{99} \cdot 3 + (\sqrt{7})^{100}$

$(3-\sqrt{7})^{100} = 3^{100} - C_{100}^{1} \cdot \sqrt{7} \cdot 3^{99} + C_{100}^{2} \cdot (\sqrt{7})^2 \cdot 3^{98} - \ldots - C_{100}^{99} \cdot (\sqrt{7})^{99} \cdot 3 + (\sqrt{7})^{100}$

Нечётные слагаемые бинома Ньютона те, в которых $\sqrt{7}$ в нечётной степени. Но в $(3+\sqrt{7})^{100}$ и $(3-\sqrt{7})^{100}$ они входят с разными знаками и сокращаются.

$3-\sqrt{7} < \frac{1}{2}$, т.к. $\sqrt{7} > 2{,}5$; $2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 < 7$

$(3-\sqrt{7})^{100} < \frac{1}{2^{100}} = \frac{1}{(1024)^{10}} < \frac{1}{(1000)^{10}} = \frac{1}{10^{30}}$

Значит в числе $(3-\sqrt{7})^{100}$ первые 30 ~~цифр~~ цифр после запятой – нули. Но тогда в числе $(3+\sqrt{7})^{100}$ первые 30 цифр – 9, иначе бы сумма дробных частей $(3+\sqrt{7})^{100}$ и $(3-\sqrt{7})^{100}$ была бы меньше 1.

Ответ: 9.

Можно использовать оборот листа для записи решений

Задача №1.

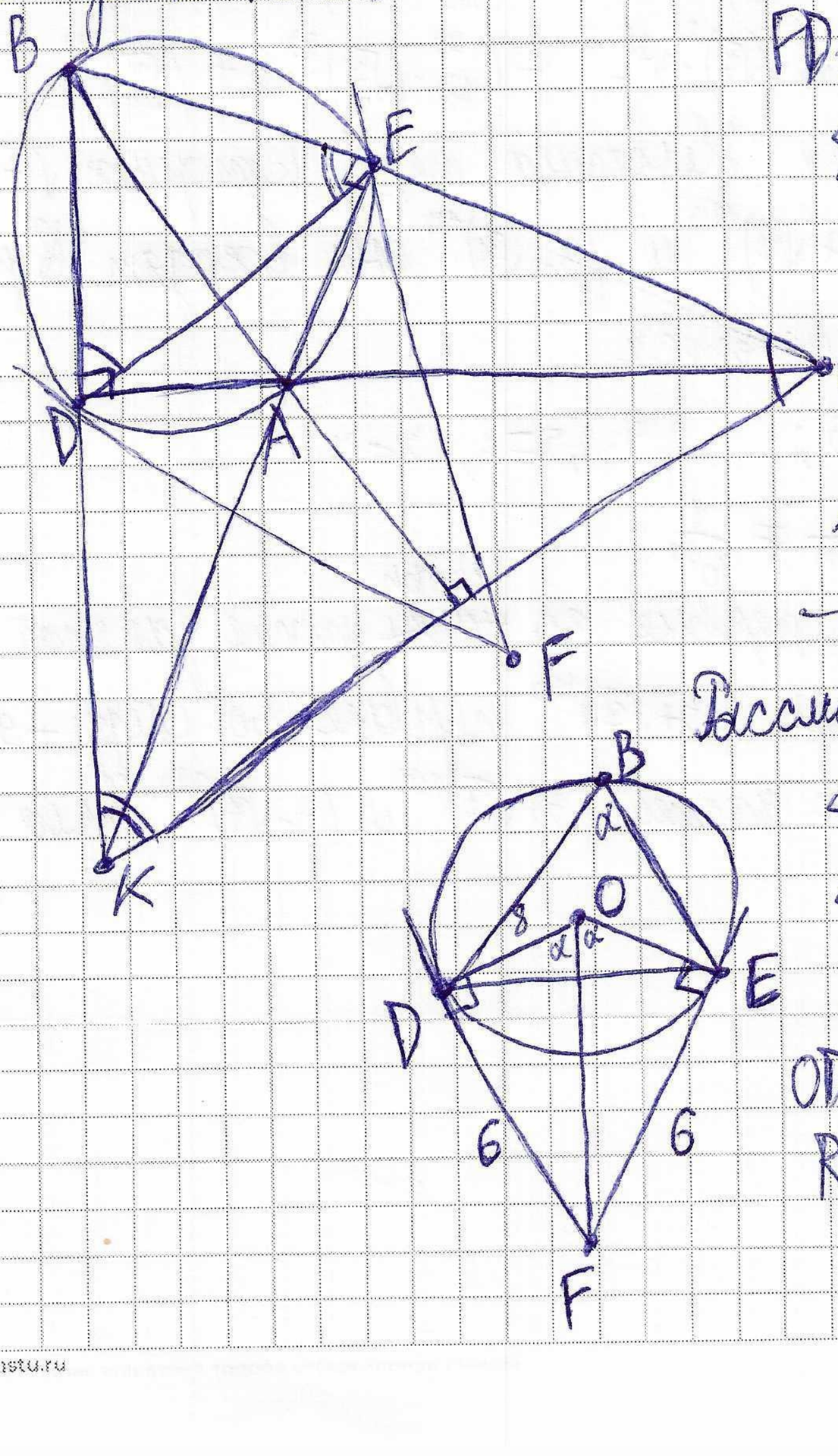
Сначала подсчитаем количество способов расставить носки в ряд, не выворачивая их. Это выбрать места для белых носков $\frac{6\cdot5}{2}=15$ способов; выбрать места для чёрных носков $\frac{4\cdot3}{2}=6$ способов; в остальные места ставим серые носки. Итого $15\cdot6=90$ способов.

Теперь выбрать из них 3, которые будут надеваться на левую ногу: $\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}=5\cdot4=20$ способов. Остальные 3 носка пойдут на правую ногу. Каждый носок можно вывернуть или нет, это делит всё на ещё $2^6=64$ способа.

Итого $90\cdot20\cdot64=1800\cdot64=115200$ способов.

Ответ: 115200.

Задача №3.



$FD=FE=6$

$\sin\angle CBD=0{,}6$

в $\triangle KBC$: CD и BA – высоты $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ – т. пересечения высот.

$AE\perp BC\Rightarrow AE$ лежит на высоте из вершины $K\Rightarrow KAE$ – одна прямая.

Рассмотрим отдельно часть рисунка:

$\angle EBD=\alpha$; $\sin\alpha=0{,}6$

$\angle DOE=2\alpha$ и $OF=6_{\angle DOE}\Rightarrow\angle DOF=\angle FOE=\alpha$

$\sin\alpha=\frac{DF}{OF}\Rightarrow OF=\frac{DF}{0{,}6}=\frac{6}{0{,}6}=10$

$OD=\sqrt{OF^2-DF^2}=\sqrt{100-36}=8$

$R_{(ADGE)}=8$

olymp.bmstu.ru

~~$\triangle BA(KDEC)$ — на одной окружности~~

Продолжение задачи №3.

(KDEC) — на одной окружности. ($\angle KDC = \angle KEC = 90°$)

$\angle BED = \angle BKC$; $\angle BDE = \angle BCK \Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle BCK$ по 2 углам.

Их коэффициент подобия $k = \frac{DB}{BC} = \cos \angle CBD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle CBD} = \sqrt{1 - 0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

$\frac{R_{(ADBE)}}{R_{(BKC)}} = k = 0{,}8 \Rightarrow R_{(BKC)} = \frac{R_{(ADBE)}}{k} = \frac{8}{0{,}8} = 10$

по т. sin в $\triangle BKC$: $\frac{KC}{\sin \angle CBK} = 2 \cdot R_{(BKC)} = 2 \cdot 10 = 20$

$KC = 0{,}6 \cdot 20 = 2 \cdot 6 = 12$

$\angle CAK = \angle EAD$ (верт.) $= 180° - \angle EBD$ (по окружности)

$\sin \angle EBD = 0{,}6 \Rightarrow \sin \angle CAK = 0{,}6$

по т. sin в $\triangle KAC$; $\frac{KC}{\sin \angle CAK} = 2 \cdot R_{(KAC)}$

$R_{(KAC)} = \frac{12}{0{,}6 \cdot 2} = \frac{12}{1{,}2} = 10$

Ответ: 10.

Задача №4.

$P(x;x) = x^3 + 8x^3 - 3x^3 - 6x^3 - x - 2x = -3x$

т.к. x и y — целые, то $P(x,y)$ тоже целое. Значит надо найти все натуральные значения $\leq 10^7$. Если наше натуральное число n делится на 3, то оно является значением $P\left(-\frac{n}{3}; -\frac{n}{3}\right)$. ~~Сейчас~~

$P(x;y) = x^3 + 8y^3 - 3xy^2 - 6x^2y - x - 2y \equiv_3 x(x^2 - 1) + 2y(4y^2 - 1) =$

$= (x-1) \cdot x \cdot (x+1) + (2y-1) \cdot 2y \cdot (2y+1)$

Продолжение задачи №4.

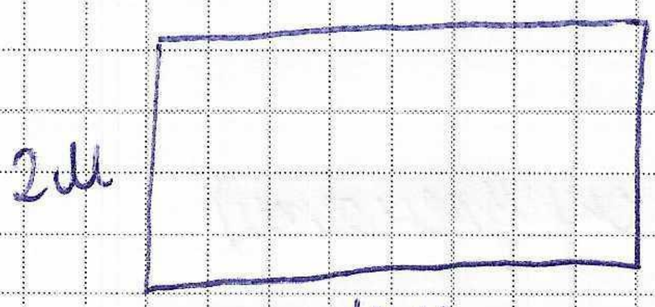
т.к. $x-1; x; x+1$ — это 3 последовательных целых числа, то одно из них делится на 3 ⇒ ⇒ их произведение делится на 3. Аналогично с $2y$; $2y-1$; $2y+1$.

Значит $P(x; y)$ всегда делится на 3. ⇒ Мы не можем получить в качестве значения число, не кратное 3.

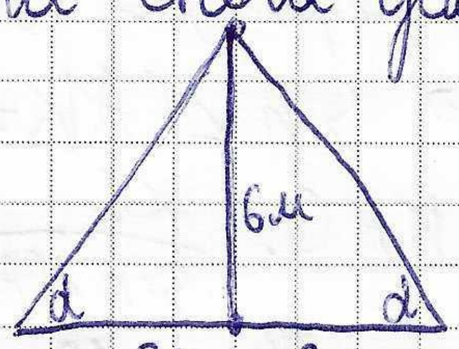
Натуральных чисел от 1 до 10^7, кратных 3, ровно 3333333.

Ответ: 3333333.

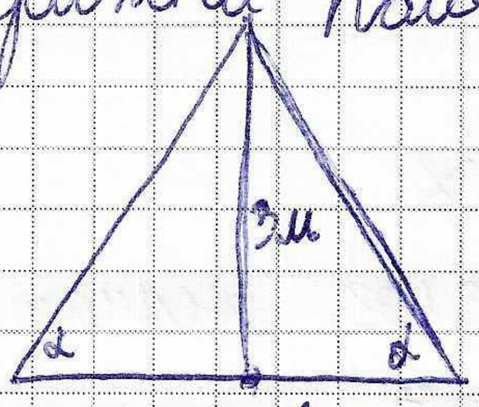
Задача № 6.



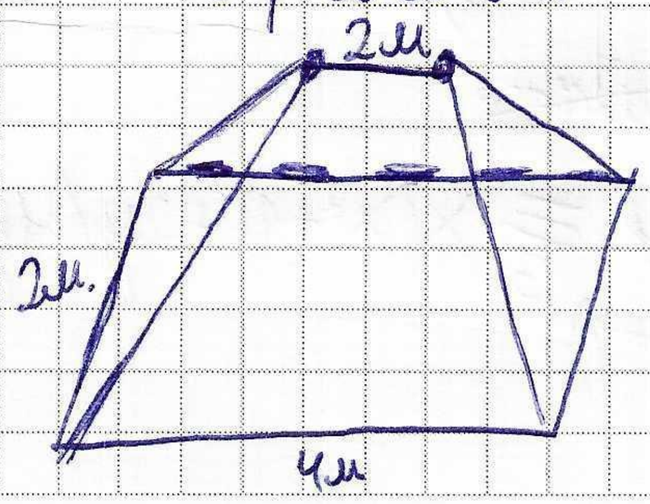
Если смотреть со стороны длиной 4м, то горка снега должна выглядеть так:



Если же смотреть со стороны длиной 2м, то горка снега должна выглядеть так:



~~Все 4 ограничивают~~ В итоге горка снега выглядит так:



olymp.bmstu.ru